Niveau(x) d'enseignement: 0 Numéro EDUQ : 9470486
Centre d'intérêt: 841

Bessot, Annie.

Panorama des cadres théoriques de la didactique des mathématiques en France / par Annie Bessot. -- Montréal : Université du Québec à Montréal, Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation, 1994.
31 f. : ill. ; 28 cm. -- (Séminaire sur la représentation ; 81)

Résumé: f. [3]. Bibliogr.: f. 22-24.

ISBN 2-921558-06-8

Vedette(s)-secondaire(s): Université du Québec à Montréal. Centre interdisciplinaire de recherche sur l'apprentissage et le développement en éducation

Descripteur(s): Mathématiques * Didactique

Identificateur(s) de nom: France

Identificateur(s) de sujet: Théorie des champs conceptuels * Théorie des situations * Théorie de la transposition didactique

Dans cet exposé, sont présentés les concepts de base de trois théories de la didactique des mathématiques en France: la théorie des situations, la théorie de la transposition didactique et la théorie des champs conceptuels.

Type de document:

CENTRE INTERDISCIPLINAIRE DE RECHERCHE SUR L'APPRENTISSAGE ET LE DEVELOPPEMENT EN EDUCATION

CIRADE

Université du Québec à Montréal

94-70486

PANORAMA DES CADRES THÉORIQUES DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES EN FRANCE

par Annie Bessot
Équipe DidaTech
Laboratoire LSD2-IMAG
Université Joseph Fourier, Grenoble

Séminaire sur la Représentation

17 septembre 1993 - no 81

CIRADE, UQAM, mars 1994

TABLE DES MATIÈRES

1. THÉORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS 4
   1.1 Schèmes et invariants 5
      - *Théorèmes en acte* 5
      - *Concept en acte* 6
   1.2 Concept 6
   1.3 Champ conceptuel 6

2. THÉORIE DES SITUATIONS -
   THÉORIE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE 7
   2.1 La transposition didactique 8
   2.2 Contrat didactique 13
      - *La mobilisation du contrat didactique va dépendre du statut des notions qui fonctionnent dans la classe* 13
      - *Phénomènes comme effet du contrat didactique* 13
   2.3 Situation didactique/situation adidactique 14
      - *Quelles sont les conditions pour qu'une situation puisse être vécue comme a-didactique?* 16
   2.4 Dévolution/institutionnalisation (savoir/connaissance) 17
      - *Dévolution* 17
      - *Institutionnalisation* 18
   2.5 Situation fondamentale 18
   2.6 Conceptions, obstacles 20
      - *Difficulté et obstacle* 20

BIBLIOGRAPHIE 22

ANNEXE 25

Résumé

Dans cet exposé seront présentés les concepts de base de la théorie des situations, de la théorie de la transposition didactique et de la théorie des champs conceptuels auxquelles sont rattachés respectivement les noms de Guy Brousseau, Yves Chevallard et Guy Vergnaud.

Dans le texte de présentation je parle de trois théories en les personnalisant, mais il va de soi que ces trois théories n'auraient pas pu se développer sans une communauté importante de chercheurs, d'équipes de recherche (pas seulement françaises!). Elles sont donc aussi attachées aux noms des chercheurs de cette communauté qui leur permet de vivre et de se développer.

J'ai fait le choix de m'adresser à un public de non initiés ou peu initiés à ces théories.

À l'origine du mouvement théorique sous l'étiquette (malheureuse) «didactique des mathématiques» en France est l'idée qu'il est possible de décrire et d'expliquer de façon rationnelle les phénomènes d'enseignement, phénomènes qui suscitent en général davantage l'empirisme ou l'opinion que le discours raisonné.

> «Un des soucis largement partagés au sein de la communauté française de didactique des mathématiques est celui de l'établissement d'un cadre théorique original développant ses propres concepts ... Un large consensus se fait aussi sur l'exigence méthodologique d'avoir recours à l'expérimentation en interaction avec la théorie...» (C. Laborde, 1989)

Ce cadre théorique fut d'abord inspiré de la théorie des situations dont Guy Brousseau a été le fondateur et de celui des champs conceptuels de Gérard Vergnaud.

Je présenterai d'abord la théorie de G. Vergnaud du fait de sa position particulière dans le champ de la didactique des mathématiques, Gérard Vergnaud étant avant tout un psychologue.

1. THÉORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Références principales: G. Vergnaud, 1990 et J. Brun, 1993.

> «La théorie des champs conceptuels est une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques.» (G. Vergnaud, 1990)

C'est un point de vue résolument psychologique dans le prolongement de l'épistémologie génétique de Piaget. Elle n'a pas pour ambition d'être une théorie didactique, mais plutôt celle de fournir un cadre pour l'étude de l'apprentissage des individus, c'est-à-dire un cadre pour analyser la formation et le fonctionnement de leurs connaissances.

> «C'est une théorie psychologique du concept, ou mieux encore de la conceptualisation du réel... Sa principale finalité est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances, chez les enfants et les adolescents, en entendant par «connaissances» aussi bien les savoir-faire que les savoirs exprimés.»

L'originalité de cette démarche est d'avoir développé des outils théoriques prenant en compte une double exigence qu'il décrit ainsi:

> «La psychologie cognitive est confrontée au double problème de tenir compte au plus près des savoirs sociaux constitués (scientifiques, techniques, culturels, pratiques...) *et en même temps de ne pas rester prisonnière de leur description actuelle*[1], de manière à analyser au plus près la formation et le fonctionnement des connaissances des sujets individuels.»
> (G. Vergnaud, 1985)

Ce qui l'amène à caractériser ainsi son approche:

> «Une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en oeuvre par les sujets dans ces situations.» (idem)

1.1 Schèmes et invariants

> «L'unité de base de cette architecture de filiations et de ruptures est le schème «organisation invariante de la conduite pour une classe de situations» ... Un schème chez un sujet n'est qu'à l'état de virtualité et c'est l'action en situation qui décidera en quelque sorte de l'individuation du schème.»
> (J. Brun, à paraître)

La théorie des champs conceptuels tient compte, d'une part, des aspects structuraux des schèmes en les analysant en terme d'invariants opératoires, et d'autre part précise la fonctionnalité des schèmes pour le processus de transformation des connaissances à travers des situations centrées sur des concepts.

- ***Théorèmes en acte***

Ce sont des invariants de type «proposition»: ils sont susceptibles d'être vrai ou faux.

---

1 C'est moi qui souligne.

Exemple: pour illustrer le concept de théorème en acte je prendrai un exemple fourni par F. Conne dans son article sur savoir et connaissance (1992):

> «...prenons comme exemple la commutativité. À la source c'est donc un savoir mathématique qui prend son sens dans un contexte mathématique abstrait (structures algébriques). Un nouvel usage lui est conféré quand ce savoir mathématique permet au psychologue de considérer comme significatif un comportement d'enfant, par exemple, dans un contexte de comptage, la commutation des facteurs d'une addition lorsque le premier facteur est plus petit que le second (2 + 7 est commuté en 7 + 2 pour être compté: 7, 8, 9 selon une procédure de comptage continué). Si le comportement est suffisamment stable, on conclura à partir de cette correspondance entre la commutativité mathématique et cette sorte de commutativité observée dans le traitement de l'enfant, qu'il y a bien théorème en acte.»

- ***Concept en acte***

Ce sont les invariants de type «fonction propositionnelle»: ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions.

Exemple: concept de cardinal et de collection.

> Ces concepts sont rarement explicités par les élèves alors qu'ils sont construits par eux dans l'action.
>
> Un concept en acte n'est pas tout à fait un concept, ni un théorème en acte un théorème.

1.2 Concept

G. Vergnaud va donner une définition des concepts dans la logique de sa problématique, à savoir une définition «pragmatique»:

> ...un concept est un triplet de trois ensembles:
> C = (S, I, **S**)
> S: l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)
> I: l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)
> **S**: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

1.3 Champ conceptuel

> Si la première entrée d'un champ conceptuel est celle des situations, on peut aussi identifier une deuxième entrée, celle des concepts et des théorèmes.

> Le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques.

Ce cadre théorique conduit à une méthodologie selon trois plans d'analyses systématiques et simultanées [correspondant au triplet C = (S, I, **S**)] le plan des situations, le plan des invariants, modèles des conduites des élèves, le plan des représentations symboliques.

Exemple des structures additives (G. Vergnaud, 1990, page 152)

2. THÉORIE DES SITUATIONS - THÉORIE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE

La théorie des situations et la théorie de la transposition didactique sont des théories didactiques dans le sens où le système minimum pris en considération est le système didactique, Enseignant, Élève, Savoir:

C'est-à-dire les interactions entre *enseignant et élèves* relatives au *savoir*, dans une situation à finalité didactique. Par rapport à ce schéma, l'objet d'étude minimum de la théorie des champs conceptuels est l'interaction élève-enseignant.

Les deux approches théoriques sont de mon point de vue complémentaires: j'ai fait le choix de privilégier la théorie des situations.

G. Brousseau, Y. Chevallard ainsi que les autres chercheurs en didactique des mathématiques affirment la spécificité de leur discipline par rapport aux autres domaines proches:

> «Pour produire, améliorer, reproduire, décrire et comprendre les situations d'enseignement des mathématiques, il est devenu nécessaire - et possible - de théoriser cette activité d'enseignement en tant qu'objet original d'étude et non pas en tant que simple conjonction de faits théorisables uniquement dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie.»
>
> (G. Brousseau, résumé thèse, 1986)

> «L'ensemble des théories psychologiques, psychogénétiques, linguistiques ou autres pouvant fournir une meilleure connaissance de l'élève est donc nécessaire au didacticien, mais son travail ne saurait se réduire à leur prise en compte.»
>
> (Y. Chevallard et A. Mercier, 1984)

Le système didactique minimum est donc le triplet: un savoir mathématique particulier, un enseignant et un élève. Ce qui définit les positions «enseignant», «élèves» est le projet du système didactique qui est de passer d'un état initial à un état final vis-à-vis du savoir, enjeu d'apprentissage.

> «Du point de vue de la relation au savoir, il y a une dissymétrie, qui est constitutive du système didactique. Nous ne dirons pas que l'élève n'entretient aucune relation au savoir avant l'enseignement, mais simplement que dans l'état initial, cette relation est peu ou pas adéquate. Sans l'hypothèse de cette dissymétrie le système didactique n'a pas lieu d'être.»
>
> (C. Margolinas, 1989)

L'enseignant se distingue de l'élève en ce qu'il est «supposé savoir», mais aussi en ce qu'il est «supposé capable» d'anticiper sur ce que l'élève va avoir à apprendre. De plus le système didactique a une caractéristique particulière, celle d'avoir pour finalité de disparaître: si l'enseignant réussit dans sa mission, il doit pouvoir se retirer, et l'élève doit pouvoir maintenir sa relation au savoir hors de sa présence.

2.1 La transposition didactique

Je m'appuierai largement sur le texte de G. Arsac, 1992. Le thème central de la théorie telle qu'elle a été récemment élargie (Y. Chevallard, 1989) est celui des savoirs et des institutions:

- tout savoir est savoir d'une institution;
- un même savoir peut vivre dans des institutions différentes;
- pour qu'un savoir puisse vivre dans une institution, il faut qu'il se soumette à un certain nombre de contraintes, ce qui implique notamment qu'il se modifie, sinon il ne peut pas se maintenir dans l'institution.

Ce jeu des savoirs dans les institutions amène à distinguer plusieurs types de pratiques relatives aux savoirs: la production, l'utilisation, l'enseignement, et la transposition: manipulation du savoir permettant à un savoir de vivre dans une institution. L'anthropologie des savoirs (ou épistémologie) est la production mais aussi la vie des savoirs.

La mise en évidence du quatrième type d'institutions est l'apport central de la théorie de la transposition. Quant à la didactique des savoirs est l'étude systématique des situations dans lesquelles un individu cherche à modifier le rapport au savoir d'un autre.

Regardons maintenant le cas particulier des transpositions didactiques. La théorie de la transposition didactique met en évidence deux points fondamentaux: soit le problème de la légitimation des objets de savoir enseignés et l'apparition systématique d'un écart entre un savoir enseigné et les références qui le légitiment, écart dû à des contraintes pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement.

Voici comment Y. Chevallard décrit le phénomène de transposition didactique dans la première version de son livre du même nom:

1.4 Le passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir peut être appelé plus justement «transposition didactique *stricto sensu*». Mais l'étude scientifique du processus de transposition didactique (qui est une dimension fondamentale de la didactique des mathématiques) suppose la prise en compte de la transposition didactique *lato sensu*, représentée par le schéma:

-> objet de savoir -> objet à enseigner -> objet d'enseignement

dans lequel le premier chaînon marque le passage de l'implicite à l'explicite, de la pratique à la théorie, du préconstruit au construit.

1.5 Voici un exemple réalisant le mouvement représenté par le schéma de la transposition didactique:
- la notion de distance (entre deux points) est utilisée spontanément «depuis toujours»;
- le concept mathématique de distance est introduit en 1906 par Maurice Fréchet (objet de savoir mathématique);
- dans le premier cycle de l'enseignement secondaire français, la notion mathématique de distance, issue de la définition de Fréchet, apparaît en 1971 dans le programme de la classe de quatrième (objet à enseigner);
- son traitement didactique varie dans les années suivant sa désignation comme objet à enseigner, le travail de transposition se poursuit.

(Y. Chevallard, 1985, pp. 39-40)

Premier chaînon: -> objet de savoir (institution productrice)

Dans nos sociétés modernes, pour le savoir mathématique en particulier, les institutions productrices de mathématiques occupent une place dominante: elles sont la source de légitimation la plus stable pour l'enseignement le plus exposé,

l'enseignement général, qui est celui de l'enseignement où la société expose ses savoirs fondamentaux.[2]

L'existence d'un objet de «savoir savant» suppose déjà toute une élaboration. On peut le considérer comme un produit d'une institution. Cette activité scientifique est une activité humaine, qui comme telle, s'inscrit dans une histoire personnelle, celle du chercheur. Au cours de son activité, le chercheur élabore des connaissances, dont certaines lui paraissent suffisamment nouvelles et intéressantes pour être communiquées à la communauté mathématique. Le chercheur donne alors à ces connaissances une forme aussi générale que possible, selon les règles discursives cours dans la communauté scientifique. Cette transformation des connaissances est une partie très importante de l'activité mathématique.

> «Un chercheur, pour communiquer aux autres chercheurs ce qu'il pense avoir trouvé, le transforme:
>
> - il supprime tout d'abord tout ce que l'on pourrait appeler l'enfance de sa recherche: les réflexions inutiles, les erreurs, les cheminements tortueux, trop longs, voire menant à des impasses. Il supprime également tout ce qui relève de l'ordre des motivations personnelles ou du soubassement idéologique de la science tel qu'il le perçoit. Nous désignerons l'ensemble de ces suppressions par le mot de *dépersonnalisation.*
>
> - Il supprime ensuite l'histoire antérieure (tâtonnement, fausses pistes) qui a conduit à cette recherche, il la détache éventuellement du problème particulier qu'il voulait résoudre et recherche le contexte le plus général dans lequel le résultat est vrai. C'est ce que nous désignerons par le mot de *décontextualisation.*» (G. Arsac, 1989)

Effet positif de ce travail: rendre le savoir public, donc utilisable et vérifiable par n'importe qui, tout au moins par tous les membres de la communauté scientifique.

Effet négatif de ce travail: faire disparaître partiellement ou totalement le contexte de la découverte qui devient mystérieuse, privée de sens.

Cette perte de sens n'existe pas pour les chercheurs contemporains et du même domaine que l'auteur de la publication qui eux, connaissent le dessous des cartes, et la position exacte de la découverte dans le réseau des problèmes qui leur sont familiers, car ils ont accès à d'autres niveaux de communication.

---

2 Pour les enseignements professionnels, moins exposés à la critique de l'ensemble de la société, de la culture, les savoirs peuvent trouver leur légitimation ailleurs que dans un savoir savant, dans les pratiques professionnelles proches par exemple.

Deuxième chaînon: Objet de savoir -> objet à enseigner (institution de transposition: noosphère)

C'est l'existence assez facilement vérifiable d'écarts qui suppose des institutions où le travail s'effectue. Le fait que ces institutions n'aient pas de visibilité sociale permanent les rend difficiles à saisir: on retrouve ici le fait que la transposition didactique est un modèle, une théorie.

Ce n'est pas l'enseignant qui transforme directement, de sa propre initiative, un savoir «savant» en objet d'enseignement.

Citons ici les résultats d'un sondage réalisé en juin 1984 auprès d'un échantillon de 182 professeurs de mathématiques de la classe de 3e:

> «Question: «*Quelles sont vos sources bibliographiques?*»
>
> Pour répondre à cette question, les enseignants avaient le choix entre plusieurs possibilités, nous extrayons quelques-unes d'entre elles particulièrement significatives pour notre propos:
>
> - manuels d'enseignement du premier cycle; fréquemment: 78%; rarement ou jamais: 6%
>
> - manuels d'enseignement supérieur; fréquemment: 1%; rarement ou jamais: 84%» (G. Arsac, 1989)

Le système d'enseignement est un système ouvert, c'est-à-dire qu'il a des relations avec l'environnement social (parents, chercheurs, institutions utilisatrices); son fonctionnement doit être compatible avec cet environnement. Y. Chevallard a emprunté à Pierre Teilhard de Chardin le terme de **noosphère** pour désigner l'ensemble des lieux, des instances où se passent les échanges entre le système d'enseignement et son environnement (associations de spécialistes, commissions permanentes ou éphémères, de réflexion sur l'enseignement, etc.). La noosphère fonctionne comme

> «coulisse du système d'enseignement, et véritable sas par où s'opère l'interaction entre ce système et l'environnement sociétal... Dans la noosphère donc, les représentants du système d'enseignement, mandatés ou non (du président d'une association d'enseignants au simple professeur militant), rencontrent, directement ou non, les représentants de la société (les parents d'élèves, les spécialistes de la discipline qui militent autour de son enseignement, les émissaires de l'organe politique...). Le problème premier qui doit être résolu pour que le système d'enseignement existe, c'est-à-dire pour que l'enseignement soit possible, est celui de la *compatibilité* du système avec son environnement.» (Y. Chevallard, 1985)

Pour qu'un savoir soit scolarisable, c'est-à-dire susceptible de devenir un objet à enseigner, il faut qu'il puisse respecter un certains nombres de contraintes. Voici la liste donnée par Y. Chevallard 1985:

«- la désyncrétisation du savoir
[c'est-à-dire la possibilité de délimiter des savoirs partiels pouvant s'exprimer dans un discours autonome]
- la dépersonnalisation du savoir
- la programmabilité de l'acquisition du savoir
- la publicité du savoir
- le contrôle social des apprentissages»

Troisième chaînon: Objet à enseigner -> objet d'enseignement-objet enseigné (institution d'enseignement)

C'est à ce niveau qu'intervient l'enseignant: la transposition didactique se continue à l'intérieur même du système didactique.

> «Un savoir n'existe pas «in vacuo» dans un vide social: tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions.» (Y. Chevallard, 1989)

Le rapport institutionnel comme contrainte au rapport personnel: évaluation de l'adéquation.

Je vais rentrer maintenant dans l'analyse des systèmes didactiques.

2.2 Contrat didactique

Du point de vue de la didactique, l'enjeu commun de l'enseignant de mathématiques et des élèves dans la classe est le savoir, mais les projets de l'un et de l'autre vis-à-vis de ce savoir sont différents de par les positions qu'ils occupent dans la relation didactique. Les phénomènes du *contrat didactique* précisent et structurent ces

> «positions et les formes de leurs assujettissements aux caractéristiques de fonctionnement du système.» (Y. Chevallard et A. Mercier, 1984)

On peut définir le contrat didactique comme

> «l'ensemble des relations qui déterminent - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce système d'obligations réciproques ressemble à un contrat. Ce qui nous intéresse ici est le contrat didactique, c'est-à-dire la part du contrat qui est spécifique du «contenu»: la connaissance visée.» (G. Brousseau, 1986)

-La mobilisation du contrat didactique va dépendre du statut des notions qui fonctionnent dans la classe.

Y. Chevallard distingue dans sa théorie initiale trois statuts des notions mathématiques, du niveau le plus explicite au niveau le moins explicite: les notions proprement mathématiques, les notions paramathématiques, et enfin les notions protomathématiques (1985).

Les notions mathématiques donnent lieu à un enseignement explicite, elles sont susceptibles de définition, on connait et on peut démontrer leurs propriétés principales, on sait reconnaître un certain nombre d'occasions d'emploi (exemples: la notion de cercle, de symétrie orthogonale).

Les notions paramathématiques sont des notions *outils* de l'activité mathématique; elles ne sont pas normalement des objets d'étude pour le mathématicien. La plupart des notions d'algèbre élémentaire sont paramathématiques (formule, paramètre, équation, factorisation,...)

Les notions protomathématiques sont des notions qui sont mobilisées seulement implicitement, elles n'ont même pas de nom. Dans les performances de l'élève, attendues par le professeur, figure la reconnaissance de certaines occasions d'emploi.

Par exemple en 4°, le professeur attendra de l'élève placé devant la question «Factorise $4x^2 - 36y^2$» qu'il reconnaisse là l'occasion de mettre en oeuvre le schème de factorisation $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Mais devant la question «Factorise $4x^2 - 36x$» l'élève devra reconnaître une factorisation simple: $4x^2 - 36y = 4x(x - 9)$.

- Phénomènes comme effet du contrat didactique

Effet Topaze par exemple: l'enseignant doit négocier les conditions de production de la réponse de l'élève. Il essaie de faire en sorte que le sens de la réponse soit le plus riche possible. En cas d'échec, il ajoute des informations réductrices du sens, jusqu'à accepter des conditions qui provoquent la réponse de l'élève sans que ce dernier ait pu investir le moindre sens.

Topaze de Marcel Pagnol: «des moutonsses étai-hunt réunisse...»

L'effet Jourdain est une forme de l'effet Topaze: l'enseignant accepte de reconnaître comme indice du savoir une production ou un comportement d'élève qui ne sont en fait que des réponses ayant des causes banales.

Glissement métadidactique

2.3 Situation didactique/situation adidactique (enseignement/apprentissage)

Le projet de l'élève est d'apprendre.

> «Une idéologie très répandue suppose un lien de simple transfert de l'enseignement vers l'apprentissage: l'élève enregistre ce qui est communiqué par l'enseignant avec peut-être quelques pertes d'informations.»
>
> (C. Laborde, 1989)

De nombreux travaux ont montré le caractère erroné de ce point de vue.

La compréhension de la situation didactique et en particulier l'apprentissage de l'élève nécessite de compléter le triangle élève-enseignant-savoir par un quatrième élément: le milieu.

G. Brousseau décrit le milieu commetant le système antagoniste de l'élève dans la situation didactique tandis que Y. Chevallard considère que les éléments constituant le milieu sont ceux qui subjectivement, c'est-à-dire pour les sujets de l'institution, apparaissent comme allant de soi, transparents, non problématiques.

Hypothèse 1 (apprentissage par adaptation): *le sujet apprend en s'adaptant (assimilation et accommodation) à un milieu qui est producteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres.*

Hypothèse 2: *un milieu sans intentions didactiques (c'est-à-dire non volontairement organisé pour enseigner un savoir) est insuffisant à induire chez un sujet toutes les connaissances que la société souhaite qu'il acquière.*

L'enseignant doit donc provoquer chez les élèves les adaptations souhaitées par un choix judicieux des situations qu'il lui propose.

> «L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage - ce qui demeure hors de son pouvoir - mais la prise en charge de la création des conditions de possibilité de l'apprentissage.» (Y. Chevallard, 1986)

Nous dirons alors que le sens d'une connaissance pour l'élève provient essentiellement des situations où la connaissance intervient ou est intervenue comme adaptations pertinentes.

Les conséquences de ces hypothèses amènent à introduire le modèle *situation adidactique / situation didactique* (G. Brousseau, 1986).

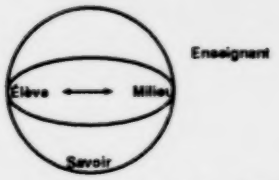
> «Brousseau a proposé un modèle relativement économique, un «noyau» adidactique, sur lequel vient se greffer une gestion didactique.» (F. Conne, 1992)

L'enseignant va chercher à proposer une situation telle que les élèves construisent leur rapport à l'objet de connaissance ou modifient ce rapport comme réponse aux exigences du milieu et non au désir de l'enseignant (contrat didactique). Une telle situation est une *situation dans laquelle ce qu'on fait, a un caractère de nécessité par rapport à des obligations qui ne sont ni arbitraires, ni didactiques, mais de l'ordre du savoir.* Il faut que l'enseignant parvienne à ce que l'élève enlève de la situation les présupposés didactiques, que la résolution du problème devienne, pour l'élève, indépendante du désir de l'enseignant: la dévolution que cherche à faire l'enseignant pour que l'élève apprenne est donc celle d'une situation adidactique[3].

Il y a des phases adidactiques dans tout enseignement, en général hors du contrôle de l'enseignant. Y. Chevallard a introduit la notion de *temps didactique* pour désigner le décalage entre le temps de l'enseignement et le temps de l'apprentissage: il y a dans l'enseignement une fiction d'un temps didactique homogène. Dans sa thèse (1992), A. Mercier montre que l'introduction officielle d'objets de savoir nouveau modifie le rapport à des objet déjà là, naturalisés, transparents. Il y a alors dévolution à l'élève d'une responsabilité par rapport à ces objets de savoirs naturalisés: en tant qu'objets anciens, il a la responsabilité de les savoir. C'est une phase adidactique pour ces objets anciens.

---

3 C. Margolinas (1989) utilise les qualificatifs public/privé introduit par Y. Chevallard pour donner la définition suivante: «Nous qualifierons d'état a-didactique tout état du système didactique dans lequel le maître entretient une relation privée avec un savoir, alors que l'élève est en relation (privée ou publique) avec ce même savoir»; un état non didactique étant «un état dans lequel la relation de l'élève au savoir est indépendante de la relation du maître au savoir».



Situation adidactique

L'apprentissage est une *modification* du rapport à la connaissance produite par l'élève lui-même, que l'enseignant doit seulement provoquer par des choix sur *les valeurs* de *variables* de la situation adidactique: *variables didactiques.*

G. Brousseau se réfère à la théorie des jeux pour modéliser les situations adidactiques: le modèle du l'élève est un sujet rationnel.

- ***Quelles sont les conditions pour qu'une situation puisse être vécue comme adidactique?***

Cette question nous renvoie à ce que les chercheurs en didactique appellent *analyse a priori.*

> «L'analyse *a priori* d'une situation cherche à déterminer si une situation peut être vécue comme adidactique par l'élève. Il s'agit d'une recherche de conditions nécessaires.» (G. Margolinas, Thèse, 1989, pp. 46)

Il faut au minimum les deux conditions suivantes:

- l'élève peut envisager une réponse mais cette réponse initiale *(procédure de base)* n'est pas celle que l'on veut enseigner: si la réponse était déjà connue, ce ne serait pas une situation d'apprentissage;
- cette procédure de base doit se révéler très vite insuffisante ou inefficace pour que l'élève soit contraint de faire des accommodations, des modifications de son système de connaissance;
- il existe un milieu pour la validation.

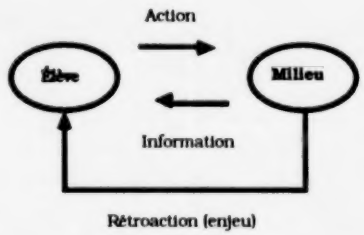
Autres conditions:

- qu'il y ait incertitude de l'élève quant aux décisions à prendre
- que le milieu permette des rétroactions
- que le jeu soit répétable
- que la connaissance visée soit logiquement requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie optimale.

- Rétroaction: influence du milieu sur l'élève

Cette influence est reçue par l'élève comme une sanction, positive ou négative, relative à son action et qui lui permet d'ajuster cette action, d'accepter ou de rejeter une hypothèse, de choisir entre plusieurs solutions.

- Les interactions avec le «milieu»



Voir en annexe l'exemple de la situation du puzzle (Brousseau G., Brousseau N.)

2.4 Dévolution/institutionnalisation (savoir/connaissance)

Les rôles principaux de l'enseignant se caractérisent par la double manoeuvre suivante: processus de dévolution et processus d'institutionnalisation.

- Dévolution

Pour cela, l'enseignant fait d'abord le travail inverse du chercheur: il cherche à recontextualiser et repersonnaliser le savoir à enseigner; il cherche des problèmes qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner, pour que l'activité de l'élève «ressemble» par moment à celle du chercheur. Il y a dévolution à l'élève d'une *responsabilité* vis-à-vis du savoir, il y a dévolution d'une situation adidactique.

Le processus de dévolution est décrit par A. Rouchier dans sa thèse comme un processus qui permet de convertir un *savoir* à enseigner en *connaissance* chez l'élève (personnalisée, contextualisée, temporalisée),

> «je propose que l'on distingue le cas où le contrôle de la relation sujet/situation se trouve du côté de la situation, ce sera de l'ordre de la connaissance, du cas où ce contrôle se trouve du côté du sujet, ce sera de l'ordre du savoir. [...] *Le savoir est une connaissance qui contrôle une situation et ses transformations, elle-même inductrice de connaissances.* [...] La dévolution consiste à articuler l'intention d'enseigner sur l'autonomie cognitive du sujet.»
>
> (F. Conne, 1992)

- Institutionnalisation

Mais si cette phase a bien marché, quand l'élève a trouvé des solutions aux problèmes posés, il (l'élève) ne sait pas qu'il a produit une connaissance qu'il va pouvoir utiliser dans d'autres occasions. Pour transformer les réponses et les connaissances des élèves en savoir, les élèves vont devoir, avec l'aide du professeur, redécontextualiser, redépersonnaliser la connaissance qu'ils ont produite afin de reconnaître dans ce qu'ils ont fait quelque chose qui ait un caractère universel, un *savoir* culturel réutilisable.

> «Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, *il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable...* » (F. Conne, 1992)

En bref, le processus d'institutionnalisation est un processus inverse de celui de dévolution qui permet de convertir une connaissance chez l'élève en un savoir réutilisable (dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé).

> En fait la conversion ne fabrique pas un nouveau produit qui serait le savoir par rapport à la connaissance ou l'inverse. On se contente de les placer, l'un et l'autre dans un ailleurs qui est celui des pratiques d'un autre niveau.

2.5 Situation fondamentale

Nous avons parlé des différents types de situations adidactiques (action, formulation, validation) et de l'apprentissage par adaptation. Dans de telles situations, l'élève a à résoudre un problème dont il a la responsabilité. Or la question centrale est la suivante: comment s'assurer que le problème posé est bien **pertinent** par rapport au savoir?

C'est un problème théorique et méthodologique:

Hypothèse: «il existe pour tout savoir (mathématique) une **famille** de situations susceptibles de lui donner un sens **correct**» (G. Brousseau, 1986) par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique.

Nous allons donner une définition simplifiée du sens d'une connaissance par nécessité méthodologique: admettons que le sens d'un savoir provient essentiellement

des adaptations de l'apprenant à des **situations**, présentes ou passées, posant des problèmes tels que le savoir visé intervient comme solution optimale.

Une **situation fondamentale** d'une connaissance est une **modélisation** de cette famille de situations spécifiques du savoir visé.

Elle est fondamentale:

1- par rapport à la connaissance: la situation «doit être telle que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale»;

2- par rapport à l'activité d'enseignement: la situation doit permettre de représenter le plus possible de «situations observées dans les classes, même les moins satisfaisantes, dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé... Elles seront obtenues par le choix de certaines variables caractéristiques de cette situation».

Une situation fondamentale doit au moins permettre:

- une genèse effective du savoir
- une «relecture» de cette genèse suivant la logique de l'organisation du savoir.

Exemple de situation fondamentale: situation fondamentale de l'addition des naturels

Un individu doit produire le cardinal d'un ensemble alors qu'il ne peut en contrôler effectivement à chaque moment qu'une partie (pour quelque raison que ce soit).

La procédure optimale consiste à constituer une partition de l'ensemble puis à dénombrer les objets dans chaque classe, en s'assurant que l'on compte bien toutes les classes.

2.6 Conceptions, obstacles

Pour certaines connaissances, il existe des situations fondamentales que l'on peut mettre en scène directement au moment voulu: ces situations fondamentales permettent à l'élève de construire une conception correcte de la connaissance.

> «Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées: il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive: il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie *faux et inadéquat.*» (G. Brousseau, 1986)

L'alternative est d'enseigner directement un savoir conforme aux exigences de la communauté scientifique c'est-à-dire le texte du savoir. De ce fait, on renonce à ce que l'élève donne du sens au savoir: le savoir n'est pas une réponse à un problème ouvert dont l'élève accepte la responsabilité.

> «Le professeur a donc le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier.» (G. Brousseau, 1986)

Le choix de l'apprentissage par adaptation à un milieu, assurant pour l'élève un sens à la connaissance construite, impose un processus de *ruptures* cognitives, c'est-à-dire de remises en cause de connaissances anciennes.

La notion de rupture cognitive est liée à la notion d'obstacle épistémologique introduite par G. Bachelard dans «La formation de l'esprit scientifique».

- *Difficulté et obstacle*

Pour bien comprendre la notion d'obstacle, il est important de faire la distinction entre deux termes synonymes dans les dictionnaires de la langue française, à savoir difficulté et obstacle.

Au niveau de la communauté mathématique, lorsqu'un nouveau problème se pose, sa résolution peut nécessiter ou non la *réorganisation* d'une théorie ou des conceptions à propos de la notion mathématique concernée.

> «*Nous dirons qu'il y a difficulté*, si le problème vient à être résolu sans que sa solution ne remette en cause le point de vue de la théorie en question ou les conceptions en cours.
> *Nous dirons qu'il y a obstacle*, si le problème vient à être résolu après avoir exigé une restructuration des conceptions ou un changement de point de vue théorique.»
>
> (H. El Bouazzaoui, 1988)

Pour la didactique, A. Duroux (1983) donne des critères pour définir un obstacle:

1- Il s'agit d'une connaissance qui fonctionne comme telle sur un **ensemble** de situations et pour certaines valeurs des variables de ces situations...

2- L'obstacle est une connaissance qui, en tentant de s'adapter à d'autres situations ou à d'autres valeurs des variables, va provoquer des **erreurs** spécifiques, repérables, analysables.

3- L'obstacle est une connaissance **stable**...

4- L'obstacle ne pourra donc être franchi que dans des **situations spécifiques de rejet** et sera constitutif du savoir... Le retour même sur la conception obstacle sera partie intégrante du nouveau savoir.

On distingue le plus souvent trois types d'obstacles selon leur origine.

1- Obstacle ontogénétique lié au développement psychogénétique du sujet.

2- Obstacle didactique lié à la transposition didactique du savoir: c'est un obstacle qui peut être évité, sans conséquence pour la construction de la connaissance, qui peut disparaître en agissant sur les situations d'enseignement.

3- Obstacle épistémologique lié au développement historique du concept: au niveau de l'élève, un obstacle épistémologique.

> «Un obstacle épistémologique est constitutif de la connaissance en ce sens que celui qui l'a rencontré et surmonté, a une connaissance différente de celui qui ne s'y est pas heurté.» (Brousseau, 1989)

BIBLIOGRAPHIE

ARSAC, G. (1989). La transposition didactique en mathématiques, in *La transposition didactique en mathématiques, en physique, en biologie*, pp. 3-36. Éditions IREM de Lyon et LIRDIS

ARSAC, G. (1992). L'évolution d'une théorie en didactique: l'exemple de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3)*, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble

ARTIGUE, M., ROBINET, J. (1982). Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 3(2)*, pp. 5-64, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU, G. (1978). Étude locale des processus d'acquisitions scolaires. *Enseignement élémentaire des mathématiques n°18*, Éditions IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1984). *Le rôle du maître et l'institutionnalisation*. Troisième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet.

BROUSSEAU, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état de l'Université de Bordeaux, Bordeaux I.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2)*, pp. 33-115, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Publication de l'IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, in *Construction des savoirs, obstacles, conflits*. Éditions Agence d'Arc Inc., Montréal.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique, le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3)*, pp. 309-336, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

BRUN, J. (1993). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, in Colloque ARDM *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, à paraître dans Recherches en Didactique des Mathématiques.

CHEVALLARD, Y., JOSHSUA, M-A., MERCIER, A. (1984). *Le problème des problèmes concrets*. Troisième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet.

CHEVALLARD, Y., MERCIER, A. (1984). *La notion de situation didactique*. Troisième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble. (1991) 2e édition.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, IMAG, Grenoble.

CONNE, F. (1981). *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Thèse, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Université de Genève.

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(2.3)*, pp. 221-270, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE, F. (1992). Du sens comme enjeu, à la formalisation comme stratégie: une démarche caractéristique en didactique des mathématiques, in JOHANNERT et LENOIR (dir.): *Sens des didactiques et didactique du sens*, Éditions CRP, Suisse.

DUROUX, A. (1983). *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*. Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I.

EL BOUAZZAOUI, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*. Thèse doctorale, Université de Laval, Québec.

GRENIER, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en 6e*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

LABORDE, C. (1989). Hardiesse et raisons des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Actes de la 13e conférence internationale Psychology of Mathematics Education*, Paris.

MARGOLINAS, C. (1989). *Le point de vue de la validation: essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. Thèse, Laboratoire LSDD, IMAG, Université de Grenoble I.

MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

MERCIER, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse, Université de Bordeaux I.

ROUCHIER, A. (1991). *Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires: proportionnalité, structures itérorécursives, institutionnalisation*. Thèse d'état, Université d'Orléans, UFR: Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans.

VERGNAUD, G. (1984). *Interactions sujet - situations.* Troisième école d'été de didactique des mathématiques, Olivet.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3)*, pp. 133-170, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

VERRET, M. (1975). *Le temps des études.* Librairie Honoré Champion, Paris.

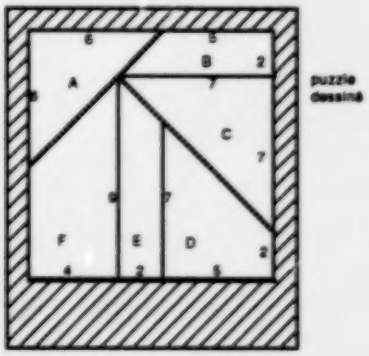
ANNEXE

Agrandissement du puzzle

D'après N. Brousseau et G. Brousseau, 1987, *Rationne. . et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Publication de l'IREM de Bordeaux

Matériel

- 6 à 8 puzzles dessinés sur des cartons rectangulaires de 20 cm x 15 cm (voir ci-après). Pour chacun des puzzles, les 6 pièces (A, B, C, D, E, F) découpées dans le même carton.



- Des feuilles de papier quadrillé.

- Un double décimètre par enfant.

Consigne

«Voici des puzzles. Vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles en respectant la règle suivante: le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction.

Je donne un puzzle par équipe. Chaque élève devra faire une ou deux pièces. Lorsque vous aurez fini, vous devrez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle.»

Déroulement

Les enfants sont partagés en équipe de 4 ou 5. Après une brève concertation par équipe, ils se séparent pour réaliser leur(s) pièce(s).

L'enseignant affiche au tableau une représentation agrandie du puzzle complet.

Analyse

Le texte suivant a été rédigé en 1993 par A. BESSOT et D. GRENIER pour les étudiants du certificat «Histoire et didactique des mathématiques» ME1 de la maîtrise de mathématiques de l'Université Joseph Fourier de Grenoble

Cette situation peut être vécue comme adidactique

- L'enseignant a la possibilité de limiter ses interventions à des interventions neutres par rapport à la connaissance qui est enjeu de cette situation: il peut se contenter d'encourager et de constater les faits, sans exigences particulières.

- Il existe une procédure de base qui s'appuie sur les connaissances sur les nombres entiers: en effet, les connaissances sur les nombres entiers sont premières par rapport à toute connaissance sur les autres nombres, c'est-à-dire que la construction de tout ensemble de nombres (comme les rationnels par exemple) s'appuie sur l'existence de l'ensemble des nombres entiers. Cette procédure de base utilise les opérations définies sur les entiers.

- Il existe un milieu pour la validation de la procédure, c'est-à-dire la possibilité pour les élèves de savoir si leur procédure est correcte ou non sans que l'enseignant intervienne: le milieu est composé de l'ensemble des morceaux «agrandis» du puzzle et des élèves producteurs indépendants de ces morceaux (phase 2).

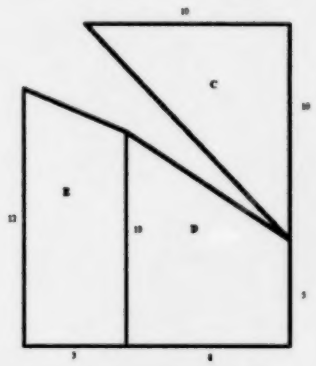
- Cette procédure de base est insuffisante, puisque la procédure visée fait intervenir nécessairement un rationnel: le résultat de la procédure de base (explicitée lors de la phase 1) est que les morceaux ne se raccordent pas au moment où les membres coopérants de l'équipe se regroupent (phase 3).

Deux stratégies qui ne sont pas des stratégies de réussite

Ces deux stratégies s'appuient sur des connaissances concernant les entiers naturels et les agrandissements: pour agrandir on ajoute ou on multiplie par un entier. **Le sens de la multiplication par un entier est celui de l'addition réitérée**. De plus, si on ajoute à un nombre un entier positif (et donc si on le multiplie par un entier positif) on obtient un entier **plus grand**.

Stratégie 1: «ajouter 3 à toutes les dimensions»

Résultat de cette procédure sur les pièces «agrandies» C, D, et E du puzzle:



Il y a rétroaction du milieu matériel: les morceaux ne se raccordent pas de façon grossière, c'est-à-dire que le non agencement des morceaux est perceptible de façon indiscutable.

Domaine de validité de la procédure 1

Le domaine de validité au sens strict de cette procédure est l'ensemble des puzzles où toutes les pièces sont composées de segments de mesure 4.

Si l'on définit le domaine de validité par rapport au milieu matériel, et que de ce fait on considère l'agrandissement comme valide si les morceaux du puzzle s'agencent bien, alors le domaine de validité est plus vaste: le domaine de validité comprend aussi des puzzles tels que le carré formé par des pièces «à angle droit» (un seul côté oblique) a ses côtés subdivisés par un même nombre. On ajoute alors un même nombre de fois 3 à chaque côté du carré.

Stratégie 2: «Multiplier chaque mesure par 2 et enlever 1»

Résultat de cette procédure sur les pièces «agrandies» C, D, et E du puzzle:

Il y a rétroaction du milieu matériel: les morceaux ne se raccordent pas mais pour cette procédure ce mauvais agencement est **discutable sur le plan perceptif**. Le puzzle est presque bon et les élèves peuvent penser que le mauvais agencement résulte de la maladresse des découpages. Il peut alors être nécessaire de recourir à une rétroaction d'un autre type, s'appuyant sur les relations entre les mesures du puzzle initial et les mesures du puzzle «image».

Par exemple pour les pièces E, D et C on a dans le puzzle initial la relation qui caractérise leur agencement: 2+5 = 7

Qu'en est-il dans le puzzle «image»?

$$2 \dashrightarrow 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$5 \longrightarrow 5 \times 2 + 1 = 11$$

$$7 \longrightarrow 7 \times 2 + 1 = 15$$

et **5+11 ≠ 15** critère qui atteste du non agencement des pièces dans le puzzle «image» de cette procédure et qui permet de la rejeter sans ambiguïté.

Variables didactiques de la situation

V1 = (n,p) , n et p étant les nombres qui définissent le rapport de proportionnalité.

Les valeurs pertinentes étant: p multiple de n, p = kn+n/2 (k entier, et n pair), p/n rationnel non décimal. Par exemple, les couples (4, 8), (4, 6), (4, 7).

Un agrandissement qui fait passer de 4 à 8 met en jeu la multiplication par 2, qui est en fait l'addition 4+4. L'élève reste dans le modèle additif et les nombres entiers.

Un agrandissement de 4 à 6 est souvent analysé comme «x plus la moitié de x». On a donc un modèle intermédiaire entre le modèle additif et le modèle linéaire, plus «proche» du modèle additif à cause du statut particulier de «la moitié», d'autant plus que dans ce cas, la moitié est aussi un nombre entier.

Il y a un saut lorsqu'il faut «passer de 4 à 7», car aucune relation de ce type n'est possible. On est obligé de quitter l'additif et de quitter les entiers.

Les valeurs de V1 mettent en jeu le sens de la multiplication par un rationnel, elles permettent ou non le passage de la multiplication par un entier (modèle additif, addition réitérée) à la multiplication par un rationnel (modèle multiplicatif, image par une application linéaire).

V2 = organisation des interactions entre élèves, ses valeurs étant un n-uplet décrivant les différents types de phases dans le temps: travail individuel, coopération, concertation, confrontation, etc. Dans la situation du puzzle, elle se décrit par: concertation, puis travail individuel, puis confrontation. La mise en place des deux dernières phases permet une véritable rétroaction de la stratégie décidée en première phase. Si l'on réduit les deux dernières phases en une seule (coopération pour construire le puzzle agrandi), on enlève au milieu sa propriété de milieu pour la validation et à la situation son caractère adidactique. D'un autre point de vue, pour un public d'élèves plus «proches» du modèle multiplicatif (collège, lycée), la première phase (concertation) risquerait de faire diffuser la stratégie gagnante dès le début du travail et donc de bloquer les apprentissage en jeu pour les élèves qui, justement, sont les plus concernés.

V3 = configuration du puzzle, dont les valeurs sont aussi des n-uplets décrivant les mesures des pièces, leur nombre, etc. Les valeurs pertinentes de cette variable sont celles qui concernent le domaine de validité des stratégies de base. Ici, les mesures sont choisies de telle manière que la procédure «ajouter 3» (dont on fait l'hypothèse qu'elle sera la stratégie initiale chez la grande majorité des élèves) conduise à construire des pièces non emboîtables de manière perceptivement évidente.

V1 se situe **du côté du savoir** en jeu (la multiplication par un rationnel non décimal, le nombre comme image par une application linéaire).

V2 est **constitutive du caractère adidactique** de la situation.

V3 est **liée aux connaissances** des élèves, puisqu'elle est basée sur les hypothèses relatives aux stratégies de base de ceux-ci.

D'autres «variables» ou contraintes semblent jouer un rôle dans la situation. Par exemple, le matériel dont dispose les élèves, papier quadrillé et règle graduée. Ils sont intégrés dans la situation pour faciliter la construction des pièces et mesurer des longueurs. Ils sont donc liés à la mesure. Va-t-on donner le statut de variable didactique à cet élément de la situation? Pour répondre, on a intérêt à revenir au savoir en jeu, c'est-à-dire le passage du modèle additif au modèle linéaire. La mesure n'est pas enjeu de savoir dans cette situation. Ces éléments peuvent parasiter la situation, mais nous faisons l'hypothèse (que l'on peut argumenter) que leur présence ou non ne la change pas fondamentalement.

Connaissance visée dans cette situation par la mise en échec de ces procédures

Le sens de la multiplication par un entier est celui de l'addition réitérée. Le sens de la multiplication **par un rationnel** doit se construire contre ce sens premier (premier du fait de l'antériorité nécessaire de la construction des entiers sur celui des rationnels).

L'enjeu de cette situation est que **les élèves rejettent explicitement les procédures faisant intervenir les entiers** (on parle souvent de modèle additif pour parler de ces procédures d'agrandissement) et **construisent au moins implicitement une règle de rejet** que l'on peut formuler ainsi: «si a + b = c dans le puzzle initial, alors f(a + b)=f(a) + f(b) dans le puzzle agrandi» (sinon les morceaux ne s'agencent pas!).

Le rejet de ce modèle additif devient alors constitutif du sens de la multiplication par un nombre rationnel. L'application linéaire, solution de ce problème, est 7/4 c'est-à-dire un rationnel-application.

Ce premier sens de la multiplication des nombres par un rationnel sera, au bout d'un long processus d'apprentissage, celui de l'image d'un rationnel-application linéaire.

Des exemplaires du présent document sont en vente à l'adresse suivante:

Centre Interdisciplinaire de Recherche sur
l'Apprentissage et le Développement en Education
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A,
Montréal, Québec
H3C 3P8

Publié par le Centre Interdisciplinaire de Recherche
sur l'Apprentissage et le Développement en Education
Université du Québec à Montréal
Conception graphique: Pierrette Précourt